Indicar **claramente** apellido y número de padrón en cada hoja que entregue. Todas las respuestas deben estar **debidamente justificadas**. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS BIEN RESUELTOS

Apellido: ……………………………………Nombres:………………………………………………

Padrón:………………………

1. Sea $f(x,y)=k\left(2x^2+2y^2\right)-xy+3x-3y$, determinar los valores de $k\in\Re$ para los cuales la función f tiene un mínimo relativo

2. Sea C la curva cerrada formada por la recta $y=0$ con $1\le x\le \frac{9}{2}$; la recta $x=1$ con $0\le y\le 2$; la gráfica de $y=\dfrac{2}{x}$ *con* $1\le x\le 4$; la gráfica de $y=\sqrt{\dfrac{1}{4}-(x-4)^2}$ *con* $4\le x\le \frac{9}{2}$

   ¿Es correcto usar $\oint_C\left(-\dfrac{y^2}{2}+x^4y+\dfrac{y^4}{4}\right)dx+\left(\dfrac{x^5}{5}+y^3x\right)dy$, para calcular el momento estático respecto del eje x de una placa plana con densidad en cada punto (x,y) constante e igual a 1, cuya frontera es la curva C ? Justificar.

3. *a)* Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de *z = ln(2x+2y+1)* en el punto *(0,0,z(0,0))*

   b) Sea C la curva intersección entre el plano hallado en *a)* y la superficie $z = x^2+y^2$

   Calcular la circulación del campo $\vec{f}(x,y,z)=\left(e^{y+2z},x.e^{y+2z},2xe^{y+2z}\right)$ a lo largo de la curva C

4. Sea el campo $\vec{f}(x,y,z)=\left(2xy^3z\ ,3x^2y^2z\,,x^2y^3\right)$

   a) Demostrar que $\vec{f}$ es conservativo

   b) Hallar la derivada direccional de la función potencial del campo en el punto (1,1,2) en la dirección del vector (1,1,2)

5. Sean $H=\left\{(x,y,z)\in\Re^3:2x^2+y^2\le z\le 8-y^2\right\}$ y el campo vectorial

   $\vec{f}(x,y,z)=\left(g(x)+z\ ,y+g(x),2z+g(x)\right)$ *con* $g\in C^1(\Re)$

   Sabiendo que $div.\vec{f}(x,y,z)=k$ y que el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie frontera de H orientada hacia el exterior de H es igual a 160π, determinar $\vec{f}$ de manera que $\vec{f}(0,0,0)=(1,1,1)$

1. ***Sea*** $f(x,y)=k\left(2x^2+2y^2\right)-xy+3x-3y$ ***, determinar los valores de*** $k\in\Re$ ***para los cuales la función*** f ***tiene un mínimo relativo***

Para hallar los puntos críticos busco los puntos en los cuales el gradiente de f se anula.

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=(0,0)$$

$$\left.\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4kx-y+3=0\ \rightarrow\ 3=-4kx+y\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4ky-x-3=0\rightarrow\ 3=4ky-x\end{cases}\right\rangle\rightarrow\ \begin{array}{c}-4kx+y=4ky-x\\ -4kx+x=4ky-y\\ -x(4k-1)=y(4k-1)\end{array}$$

Analizo dos casos:

$$si\ (4k-1)\neq 0\ \rightarrow\ -x=y$$

$$si\ (4k-1)=0\ \rightarrow\ k=\frac{1}{4}$$

O sea, el gradiente se anula para k = ¼ y en la recta y = -x. Decido por el hessiano (determinante de la matriz Hessiana) para ver los puntos en que los valores son mínimos relativos.

$$H(x,y)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial xx}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial yy}(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4k & -1\\ -1 & 4k\end{vmatrix}=16k^2-1$$

Para que sea un mínimo relativo tengo que verificar si $H(x,y)>0\wedge\dfrac{\partial^2 f}{\partial xx}(x,y)>0$

Para que $H(x,y)>0\rightarrow 16k^2-1>0\rightarrow 16k^2>1\ \rightarrow\ |k|>\frac{1}{4}$ y como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial xx}(x,y)>0\ \rightarrow\ 4k>0\ \rightarrow\ k>0$ entonces, puedo asegurar que con k > ¼ se cumple que f alcanza mínimo relativo.

Con k = ¼ el gradiente de f se anula, pero el hessiano da cero, por lo que no puedo decidir por ese criterio.

$si\ \ k=\frac{1}{4}$:

$$\left.\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x-y+3=0\ \rightarrow\ y=x+3\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=y-x-3=0\rightarrow\ y=x+3\end{cases}\right\rangle\rightarrow en\ \ y=x+3\ \ tengo\ una\ recta\ de\ PC$$

Si especializo f en la recta y = x + 3 tengo que f = - 9/2 . Si logro demostrar que en ningún punto f vale menos que (– 9/2), entonces puedo decir que con k = ¼ también tengo mínimo relativo.

Quizás la demostración no sea necesaria porque no "salta a simple vista", ya que no es una ecuación frecuente de ver en la cursada. Creo que con enunciar que con k = ¼ puede haber mínimo relativo, pero que no contamos con las herramientas para probarlo, alcanza.

Pero voy a demostrar cómo puedo decir con k = ¼ f alcanza mínimo relativo.

Para k = ¼ tengo que en TODA la recta y = x + 3, f vale -9/2.

Puedo pensar en recorrer todo el espacio de R^2 con rectas paralelas a *y = x + 3*, y así busco los valores de f en TODAS esas rectas. Si observo que es SIEMPRE mayor que -9/2 estaría demostrando que en la recta y=x+3 se alcanza el mínimo.

Rectas paralelas a y = x + 3 → y = x + r (r ε R)

$$f(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-xy+3x-3y \;\rightarrow\; f(x,x+r)=\frac{x^2}{2}+\frac{(x+r)^2}{2}-x(x+r)+3x-3(x+r)=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+xr+\frac{r^2}{2}-x^2-xr+3x-3x-3r=\boxed{\frac{r^2}{2}-3r=f(x,x+r)}$$

Recorriendo todo R^2 por medio de las rectas, veo que el valor de f NO depende de la variable x, sino que es un valor constante en toda la recta, y depende del valor de r.

Ahora quiero hallar, si existe, algún valor de r para el que f sea menor que -9/2

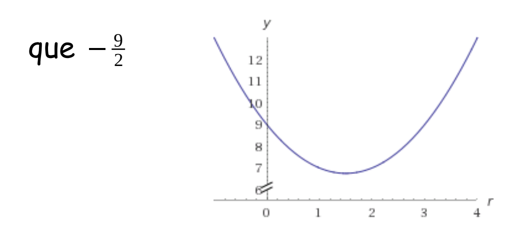
$$\frac{r^2}{2}-3r<-\frac{9}{2} \rightarrow r^2-6r<-9 \rightarrow r(r-6)<-9$$

Analizo r… tres casos:

I) <u>r < 0</u>: r(r-6) > 0 > -9 absurdo, pues r(r-6) < -9 → r ≥ 0

II) <u>r = 0</u>: r(r-6) = 0 > -9 absurdo, pues r(r-6) < -9 → r > 0

III) <u>r > 0</u>: r(r-6) = r^2-6r < -9 → r^2-6r + 9 < 0 → el valor mínimo de r^2-6r + 9 se obtiene en $r=\sqrt{6}$ con lo que r^2-6r + 9 > 0, por lo tanto, no existe valor de r con el que f valga menos que $-\frac{9}{2}$

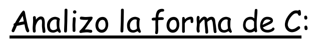


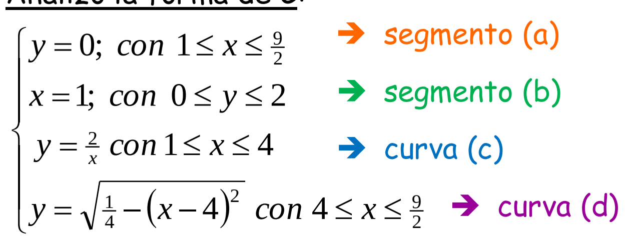
Al no existir valor de r para lo que f sea menor que $-\frac{9}{2}$ puedo afirmar que con k = ¼ se obtiene mínimo local. Por lo tanto:

$$\boxed{f(x,y)\ alcanza\ \ mínimo\ \ local\ \ con\ \ k\geq\frac{1}{4}}$$

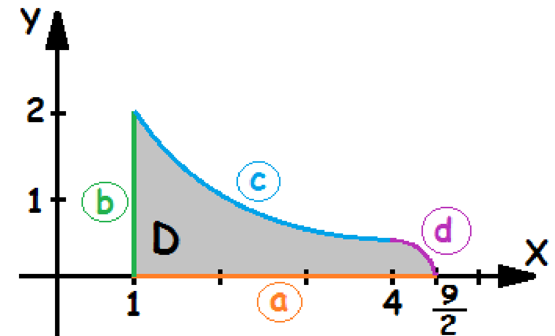
2. Sea C la curva cerrada formada por la recta $y=0$ con $1\le x\le \frac{9}{2}$; la recta $x=1$ con $0\le y\le 2$; la gráfica de $y=\dfrac{2}{x}$ con $1\le x\le 4$; la gráfica de $y=\sqrt{\dfrac{1}{4}-(x-4)^2}$ con $4\le x\le \frac{9}{2}$

¿Es correcto usar $\oint_C \left(-\dfrac{y^2}{2}+x^4y+\dfrac{y^4}{4}\right)dx+\left(\dfrac{x^5}{5}+y^3x\right)dy$, para calcular el momento estático respecto del eje x de una placa plana con densidad en cada punto (x,y) constante e igual a 1, cuya frontera es la curva C ? Justificar.





$$\begin{cases} y=0;\ con\ 1\le x\le \frac{9}{2} \\ x=1;\ con\ 0\le y\le 2 \\ y=\frac{2}{x}\ con\ 1\le x\le 4 \\ y=\sqrt{\frac{1}{4}-(x-4)^2}\ con\ 4\le x\le \frac{9}{2} \end{cases}$$



Ahora calculo el momento estático de la zona gris (la llamo D y es la superficie delimitada por la curva C)

$$S_X=\iint_D y.\delta_{(x,y)}.dy.dx \overset{\delta_{(x,y)}=1}{=} \iint_D y.dy.dx$$

Ahora analizo la integral del enunciado:

$$I=\oint_C \left(-\frac{y^2}{2}+x^4y+\frac{y^4}{4}\right)dx+\left(\frac{x^5}{5}+y^3x\right)dy$$

Sea $P_{(x,y)}=-\dfrac{y^2}{2}+x^4y+\dfrac{y^4}{4}$, $Q_{(x,y)}=\dfrac{x^5}{5}+y^3x$ y $\vec{F}_{(x,y)}=\left(P_{(x,y)}\ ,\ Q_{(x,y)}\right)$

Veo si se cumplen las hipótesis del Teorema de Green:

- ✓ D es una región compacta cuyo borde es C, una curva cerrada y suave por trozos
- ✓ $\vec{F}:\Re^2\to\Re^2 con\ \vec{F}_{(x,y)}=\left(P_{(x,y)},Q_{(x,y)}\right),\ donde\ P_{(x,y)}\in C^1(\Re^2), pues\ f\in C^2(\Re^2)\to f'\in C^1(\Re^2)$

  $y\,Q_{(x,y)}\in C^2(\Re^2), pues\ es\ suma\ algebraica\ de\ un\ \underbrace{polinomio}_{C^\infty}\ y\ f\in C^2(\Re^2)$

  $\therefore \vec{F}\in C^1(\Re^2)$

Como se cumplen las hipótesis del T. Green puedo decir que:

$$\oint_C P_{(x,y)}dx+Q_{(x,y)}dy=\iint_D \left(Q'_X-P'_Y\right)dx.dy$$

$$\left.\begin{array}{l} P_{(x,y)}=-\dfrac{y^2}{2}+x^4y+\dfrac{y^4}{4}\to\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=-y+x^4+y^3 \\ Q_{(x,y)}=\dfrac{x^5}{5}+y^3x\to\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=x^4+y^3 \end{array}\right\}\to\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=x^4+y^3-\left(-y+x^4+y^3\right)=y$$

Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} I=\oint_C \left(-\dfrac{y^2}{2}+x^4y+\dfrac{y^4}{4}\right)dx+\left(\dfrac{x^5}{5}+y^3x\right)dy=\iint_D y.dy.dx=I \\ S_X=\iint_D y.dy.dx \end{array}\right\rangle\to I=S_X$$

Por lo tanto:

Es correcto usar la integral del enunciado para calcular el momento estático respecto del eje x

3. a) *Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = \ln(2x+2y+1)$ en el punto $(0,0,z(0,0))$*

Sea $f : D \subseteq \Re^3 \to \Re \,/\, f(x,y) = z$; $f \in C^1(D)$, (función logarítmica), por lo tanto posee plano tangente.

Sea $P_0 = (0,0,z_{(0,0)}) = (0,0,f_{(0,0)}) = (0,0,0) = P_0$

La ecuación del plano tangente es:

$$z = f_{(x_0,y_0)} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).(y-y_0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2}{2x+2y+1} \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{2}{2x_0+2y_0+1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2}{2x+2y+1} \to \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \dfrac{2}{2x_0+2y_0+1} \end{cases}$$

$$z = \overbrace{f_{(x_0,y_0)}}^{0} + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}^{\frac{2}{2x_0+2y_0+1}}\left(x - \overbrace{x_0}^{0}\right) + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}^{\frac{2}{2x_0+2y_0+1}}\left(y - \overbrace{y_0}^{0}\right) = 0 + \frac{2x}{\underbrace{2.0+2.0+1}_{1}} + \frac{2y}{\underbrace{2.0+2.0+1}_{1}} \to z = 2x+2y$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente en el punto P_0 es: $\boxed{z = 2x+2y}$

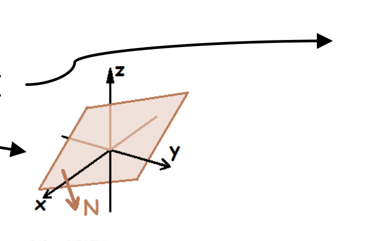
b) *Sea C la curva intersección entre el plano hallado en a) y la superficie $z = x^2+y^2$*
Calcular la circulación del campo $\vec{f}(x,y,z) = \left(e^{y+2z}, x.e^{y+2z}, 2xe^{y+2z}\right)$ a lo largo de la curva C

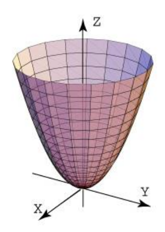
Analizo la forma de C:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2x + 2y \end{cases}$$

➔ paraboloide centrado en el eje Z

➔ Plano con Normal = (2,2,-1)





$$x^2 + y^2 = 2x + 2y \to$$
$$\to x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0 \to$$
$$\to (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

Z

C

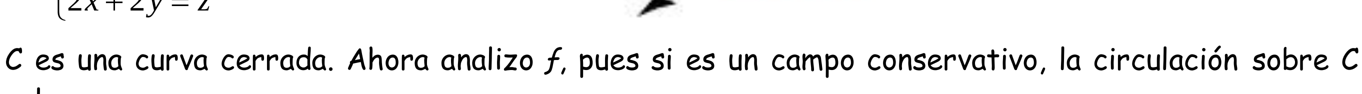
proyección de C

Y

X

Por lo tanto:

$$C : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ 2x + 2y = z \end{cases}$$



C es una curva cerrada. Ahora analizo *f*, pues si es un campo conservativo, la circulación sobre *C* vale cero.

$\vec{f}(x,y,z) = \left(e^{y+2z}, x.e^{y+2z}, 2xe^{y+2z}\right)$ ➔ como las componentes de f son polinomios y exponenciales entonces $\vec{f} \in C^\infty(\Re^3)$, $dom(\vec{f}) = \Re^3$, está definido en un abierto simplemente conexo. Ahora falta analizar si la matriz jacobiana es simétrica.

Sea $\vec{f}(x,y,z) = \left(P_{(x,y,z)}, Q_{(x,y,z)}, R_{(x,y,z)}\right)$

Para que J sea simétrica se tiene que cumplir simultáneamente que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) = e^{y+2z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = e^{y+2z} \end{matrix}\right\rangle = \\ \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) = 2.e^{y+2z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = 2.e^{y+2z} \end{matrix}\right\rangle = \\ \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) = 2.x.e^{y+2z} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = 2.x.e^{y+2z} \end{matrix}\right\rangle = \end{matrix}\right\} Se\ cumplen\ las\ tres\ igualdades \rightarrow J\ simétrica$$

Por lo tanto, $\vec{f}$ es un campo conservativo y, como C es una curva cerrada, puedo asegurar que:

$$\boxed{\oint_C \vec{f}.d\vec{l} = 0}$$

4. Sea el campo $\vec{f}(x,y,z)=\left(2xy^3z\ ,3x^2y^2z\,,x^2y^3\right)$

a) Demostrar que $\vec{f}$ es conservativo

Para demostrar que el campo es conservativo voy a analizar si se cumplen las siguientes condiciones:

I) Dominio de $\vec{f}$ es un abierto simplemente conexo: $dom\left(\vec{f}\right)=\Re^3$

II) $\vec{f}\in C^1\left(\Re^3\right)$: como las componentes de f son polinomios entonces $\vec{f}\in C^\infty\left(\Re^3\right)\rightarrow \vec{f}\in C^1\left(\Re^3\right)$

III) Matriz jacobiana simétrica:

Sea $\vec{f}(x,y,z)=\left(P_{(x,y,z)},Q_{(x,y,z)},R_{(x,y,z)}\right)$

Para que J sea simétrica se tiene que cumplir simultáneamente que:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z)=\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z)\\ \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y,z)=\dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z)\\ \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y,z)=\dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z)=6xy^2z\\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z)=6xy^2z\end{array}\right\rangle =\\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y,z)=2xy^3\\ \dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z)=2xy^3\end{array}\right\rangle =\\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y,z)=3x^2y^2\\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z)=3x^2y^2\end{array}\right\rangle =\end{array}\right\} Se\ cumplen\ las\ tres\ igualdades \rightarrow J\ simétrica$$

Como se cumplen I), II) y III) entonces $\vec{f}$ es un campo conservativo

b) Hallar la derivada direccional de la función potencial del campo en el punto (1,1,2) en la dirección del vector (1,1,2)

Como $\vec{f}$ es un campo conservativo, entonces $\exists \varphi : \Re^3 \to \Re : \vec{f} = \nabla \varphi$ siendo φ su función potencial.

<u>Busco la función potencial</u>:

$$\vec{f}_{(x,y,z)} = \nabla \varphi_{(x,y,z)} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) \right) = \left(2xy^3z \ , 3x^2y^2z \, , x^2y^3\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy^3z \xrightarrow{\text{integro } X \text{ m.a.m}} \underbrace{\varphi_{(x,y,z)} = x^2y^3z + \delta_{(y,z)}}_{\downarrow \text{derivo con respecto a } Y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 3x^2y^2z \ (1) \qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 3x^2y^2z + \dfrac{\partial \delta}{\partial y}(y,z) \underbrace{=}_{(1)} 3x^2y^2z \to \dfrac{\partial \delta}{\partial y}(y,z) = 0 \to \delta_{(y,z)} = \beta_{(z)} + C_1 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = x^2y^3 \ \ (2) \qquad \underbrace{\varphi_{(x,y,z)} = x^2y^3z + \overbrace{\beta_{(z)} + C_1}^{\delta_{(y,z)}}}_{\downarrow \text{derivo con respecto a } Z} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x^2y^3 + \beta'_{(z)} \underbrace{=}_{(2)} x^2y^3 \to \beta'_{(z)} = 0 \to \beta_{(z)} = C_2$$

$$\varphi_{(x,y,z)} = x^2y^3z + \underbrace{\overbrace{C_2}^{\beta_{(z)}} + C_1}_{K} \qquad ; K, C_1, C_2 \in \Re$$

Por lo tanto, la función potencial es:

$$\varphi_{(x,y,z)} = x^2y^3z + K \ \ ; \ (K \in \Re)$$

Como $\varphi_{(x,y,z)} \in C^\infty\left(\Re^3\right)$ (pues es un polinomio) → es diferenciable y puedo usar la regla de la cadena para hallar la derivada direccional:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \breve{v}}(x,y,z) = \nabla \varphi_{(x,y,z)} . \breve{v} = \left(2xy^3z \ , 3x^2y^2z \, , x^2y^3\right) . \frac{v}{\|v\|}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \breve{v}}(1,1,2) = \nabla \varphi_{(1,1,2)} . \breve{v} = \left(2.1.1^3 2 \ , 3.1^2 1^2 2 , 1^2 1^3\right) . \frac{(1,1,2)}{\|(1,1,2)\|} = (4,6,1).(1,1,2).\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{(4+6+2)}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

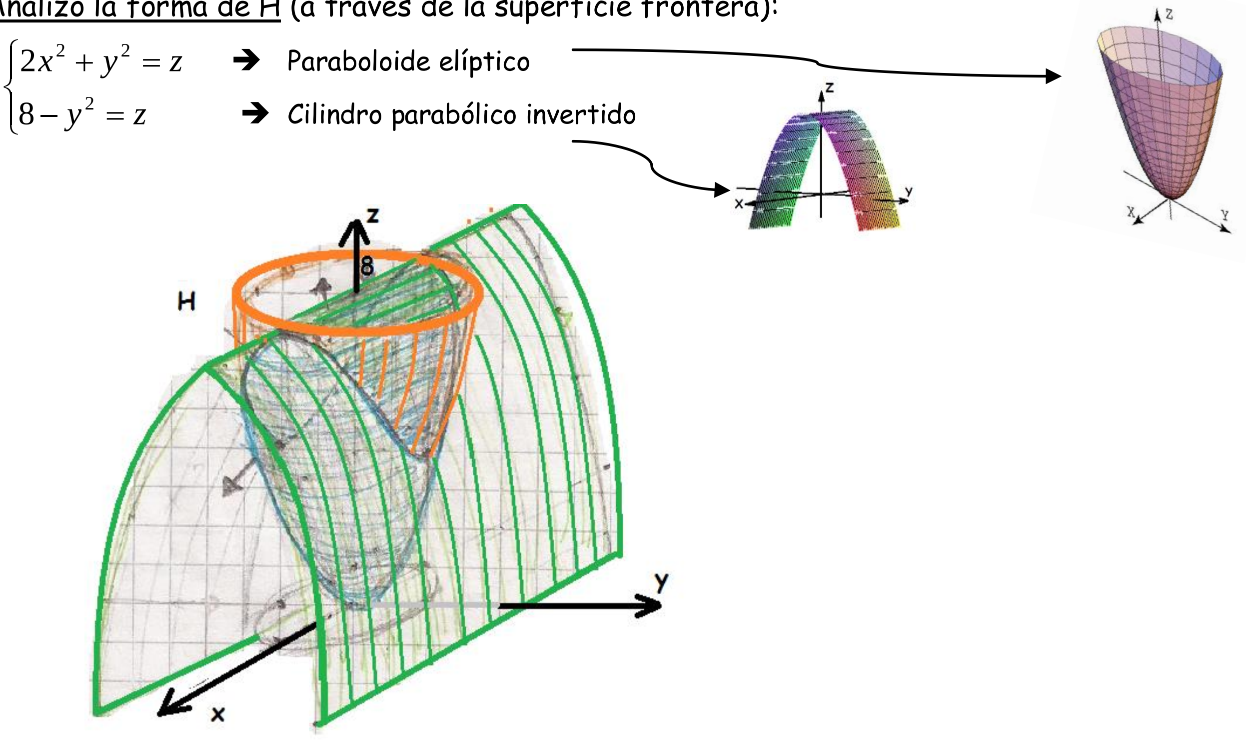
$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial \breve{v}}(1,1,2) = 2\sqrt{6}}$$

5. ***Sean*** $H=\{(x,y,z)\in\Re^3 : 2x^2+y^2\le z\le 8-y^2\}$ ***y el campo vectorial*** $\vec{f}(x,y,z)=(g(x)+z\ ,y+g(x),2z+g(x))\ con\ g\in C^1(\Re)$

Sabiendo que $div.\vec{f}(x,y,z)=k$ ***y que el flujo de*** $\vec{f}$ ***a través de la superficie frontera de H orientada hacia el exterior de H es igual a 160π, determinar*** $\vec{f}$ ***de manera que*** $\vec{f}(0,0,0)=(1,1,1)$

<u>Analizo la forma de H</u> (a través de la superficie frontera):

$\begin{cases} 2x^2+y^2=z & \rightarrow \text{Paraboloide elíptico} \\ 8-y^2=z & \rightarrow \text{Cilindro parabólico invertido} \end{cases}$



Sea S la superficie frontera de H, analizo si se cumplen las hipótesis del Teorema de Gauss

I) Sea $\vec{f}(x,y,z)=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),R(x,y,z))\ ;\ \vec{f}:\Re^3\rightarrow\Re^3\in C^1(\Re^3)$, pues P(x,y,z), Q(x,y,z) y R(x,y,z) son sumas algebraicas de funciones elementales y funciones C^1 (R), por enunciado, $\vec{f}$ ε C^1 (R^3) ✓

II) S es una superficie orientada hacia el exterior. ✓

III) *H* es una región en R^3 contenida por la superficie S. ✓

Se verificaron las hipótesis, por lo tanto: $$\iint_S \vec{f}.d\vec{s}=\iiint_H div.\vec{f}\ dVol=160\pi$$

Calculo $div.\vec{f}(x,y,z)=\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\dfrac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)=k$

Por lo tanto, calculo el volumen para conocer el valor de *k* (para integrar paso a coordenadas cilíndricas) pues el flujo resulta ser proporcional al volumen

Hallo la intersección de las superficies (cilindro parabólico y paraboloide elíptico) para analizar la región de integración.

$$C:\begin{cases}2x^2+y^2=z\\ 8-y^2=z\end{cases}\Big\rangle 2x^2+y^2=8-y^2\rightarrow\Big\langle\begin{matrix}2x^2+2y^2=8\\ \underbrace{x^2+y^2=4}_{\substack{cilindro\ radio\ 2\\ centrado\ en\ eje\ Z}}\end{matrix}$$

Y 2 x

Coordenadas cilíndricas:

$$\sigma_{(r,t,z)}(r.\cos(t), r.sen(t), z) \qquad \begin{cases} j = r \\ 0 \le r \le 2 \\ 0 \le t \le 2\pi \\ \underbrace{2x^2 + y^2}_{(1)} \le z \le \underbrace{8 - y^2}_{(2)} \end{cases}$$

$$(1) \quad 2x^2 + y^2 \overset{C.V.}{=} 2.r^2\cos^2(t) + r^2 sen^2(t)$$

$$(2) \quad 8 - y^2 \overset{C.V.}{=} 8 - r^2 sen^2(t)$$

Por lo tanto:

$$Vol_H = \iiint_H dx.dy.dz \overset{C.V.}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{2.r^2\cos^2(t)+r^2sen^2(t)}^{8-r^2sen^2(t)} \overbrace{r}^{jacobiano} .dz.dr.dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[8 - r^2 sen^2(t) - \left(2.r^2\cos^2(t) + r^2 sen^2(t)\right)\right] r.dr.dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 8r - r^3 sen^2(t) - 2.r^3\cos^2(t) - r^3 sen^2(t).dr.dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 8r \underbrace{- 2r^3 sen^2(t) - 2.r^3\cos^2(t)}_{-2r^3}.dr.dt = \int_0^{2\pi}\int_0^2 8r - 2r^3 dr.dt = 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r - r^3 dr.dt =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 dt = 2\int_0^{2\pi} 4.dt = 8\int_0^{2\pi} dt = 16\pi = Vol_H$$

Hallo el valor de k:

$$\iint_S \vec{f}.d\vec{s} = \iiint_H \overbrace{div.\vec{f}}^{k} dVol = k\overbrace{\iiint_H dVol}^{16\pi} \overset{por\ enunciado}{=} 160\pi \to k = 10$$

Entonces:

$$div.\vec{f} = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) = \overbrace{10}^{k}$$

Hallo las derivadas que participan en el cálculo de la divergencia:

$$\begin{cases} P_{(x,y,z)} = g(x) + z & \to \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) = g'(x) \\ Q_{(x,y,z)} = y + g(x) & \to \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = 1 \\ R_{(x,y,z)} = 2z + g(x) & \to \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) = 2 \end{cases}$$

$$div.\vec{f} = g'(x) + 1 + 2 = 10 \to g'(x) = 7 \xrightarrow{integro\ en} g(x) = 7x + C \quad (C \in \Re)$$

Especializo en (0,0,0):

$$\vec{f}_{(0,0,0)} = \left(g_{(0)} + 0\ ,\ 0 + g_{(0)}\ ,\ 2.0 + g_{(0)}\right) \overset{x\ enunciado}{=} (1,1,1) \to g_{(0)} = 1 \therefore g_{(0)} = 7.0 + C = 1 \to C = 1$$

$$g_{(x)} = 7.x + 1$$

$$\boxed{\vec{f}(x,y,z) = (7x + 1 + z\ ,\ y + 7x + 1, 2z + 7x + 1)}$$

¡¡¡ Éxitos en los exámenes !!!

"La mente es igual a un paracaídas. Sólo funciona si se abre" (Albert Einstein)

(si encuentran algún error, algo no está muy claro o está mal explicado, por favor escríbanme un mail a sylvina64@gmail.com así lo corrijo)